数理解析研究所講究録
96巻 1970年 58-72

Banach function spaces について

岡山大理　越　昭三

序　(Ω, Σ, μ) を σ-finite measure space とし，その上の equivalent class は同一視して measurable function からなる Banach space L_ρ（ρ は norm）に関する表現定理と Szegö の定理について述べる。

§1　L_ρ　M^+ を非負可測関数の集合とし，その上で定義された $\bar{R}^+$ (non-negative extended real number) に値をとる ρ についてつぎの条件がみたされているものとする。

(1)　$0 \leqq \rho(f) \leqq +\infty$,　$\rho(f)=0 \Leftrightarrow f=0$　$(f \in M^+)$

(2)　$\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f)$　$(\alpha \geqq 0)$

(3)　$\rho(f+g) \leqq \rho(f) + \rho(g)$　$(f, g \in M^+)$

(4)　$f \leqq g \Rightarrow \rho(f) \leqq \rho(g)$

$L_\rho = L_\rho(\Omega, \Sigma, \mu) = \{ f \mid \rho(|f|) < \infty \}$ とし，ρ は L_ρ の norm となる。complete になるための条件として，

(5)　$f_n \uparrow f$ $(f_n, f \in M^+)$,　$\sup_n \rho(f_n) < +\infty \Rightarrow \rho(f) < +\infty$　(W. F. P.)

$(\tilde{5})$　$f_n \uparrow f$ $(f_n, f \in M^+) \Rightarrow \rho(f_n) \uparrow \rho(f)$　(S. F. P.)

なる ρ (function norm) を考える。以下 $(\hat{5})$ ((5) は $(\hat{5})$ より弱い) をみたすものとし，更に $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ (disjoint 和) として，$X \subset \Omega_B$，$\mu(X) > 0$ ならば $\rho(\chi_X) = +\infty$ なる性質を Ω_B はもち，$\exists \Omega_n \uparrow \Omega$，$\rho(\chi_{\Omega_n}) < +\infty$ となる Ω_A を定めることが出来る。trivial case を除くため Ω_B (purely infinite part) は measure 0 という仮定をつけておく。 (5) をみたす ρ は $(\hat{5})$ をみたす function norm と equivalent になる。 ρ に対して

$$\rho'(f) = \sup\left\{ \int_\Omega |fg|\,d\mu \;\middle|\; \rho(g) \leqq 1 \right\}$$

と定義すれば，ρ' は $(\hat{5})$ をみたす function norm である。

Ω が ρ に関して purely infinite part をもたなければ ρ' に関してももたない。このとき，$\Omega_n \uparrow \Omega$，$\rho(\chi_{\Omega_n}) < +\infty$ となる可測集合列 Ω_n を ρ-admissible というが，ρ-admissible であると同時に ρ'-admissible な Ω_n がとれる。更に $(\hat{5})$ をみたせば

$$\rho(f) = \rho''(f)$$

であり，又つぎの Hörder の不等式が成立する。

$$\int_\Omega |fg|\,d\mu = \|f\cdot g\|_1 \leqq \rho(f)\,\rho'(g)$$

一般に $L_{\rho'} \subset L_\rho^*$ (L_ρ の Banach space としての dual)

§2 $\mathbb{B}(X, L_\rho)$ の表現

Banach space X から Banach function space L_ρ への連続な linear operator の全体を $\mathbb{B}(X, L_\rho)$ としておく。この operator が抽象的な additive set function と考えられることをみよう。

X^*をXのBanach dualとする。$\Sigma_0=\{E\in\Sigma \mid \rho(\chi_E)<+\infty\}$, $\Sigma'_0=\{E\in\Sigma \mid \rho'(\chi_E)<+\infty\}$とする。$\mathcal{E}$は$\Omega$の有限分割の一部とし$\mathcal{E}$のメンバー$E_i$（$i$は有限）については$E_i\in\Sigma_0$，かつ$\mu(E_i)<+\infty$としておく。更に$f\in L_\rho$に対して

$$f_{\mathcal{E}}=\sum_{\mathcal{E}}\left(\int_{E_i}|f|\,d\mu/\mu(E_i)\right)\chi_{E_i}$$

ここでL_ρに関する性質（L）を導入する。

（L）　任意の$\mathcal{E}$に対して　　$\rho(f_{\mathcal{E}})\leqq\rho(f)$

したがつて，分割$\mathcal{E}$を細かくすると，$\rho(f_{\mathcal{E}})$はincreasingである。L_ρが（L）をもてば$\rho(\chi_E)\geqq\frac{\mu(E)}{\mu(E\cup F)}\rho(\chi_F)$（E, Fは有限測度）であり，$0<\mu(E)<\infty$ならば$0<\rho(\chi_E)<\infty$，更に$\mu(E)<\infty$のとき$\mu(E)=\rho(\chi_E)\rho'(\chi_E)$．そこで$\Sigma_F=\{E \mid E\in\Sigma,\ \mu(E)<\infty\}$としたら$\rho$が（L）をもつとき

$$\Sigma_0\cap\Sigma_F=\Sigma'_0\cap\Sigma_F$$

更にρが(L)をもてばρ'もまた(L)をもつ。

さて，additive set function $x^*(\cdot):\Sigma'_0\to X^*$を考える。$x^*(\cdot)$のvariationをつぎのように定義する。

$$V_\rho(x^*(\cdot))=\sup_{\|x\|\leqq 1}\sup_{\mathcal{E}}\rho\left(\sum_{\mathcal{E}}[x^*(E_i)x/\mu(E_i)]\chi_{E_i}\right)$$

そこで$\mathbb{V}_\rho=\{x^*(\cdot) \mid x^*(\cdot):\Sigma'_0\to X^*,\ x^*(\cdot)x$ countably additiveかつ$\mu(E)\to 0$ならば$x^*(E)\cdot x\to 0$かつ$V_\rho(x^*(\cdot))<\infty\}$とおくと，$\mathbb{V}_\rho$は$V_\rho$をnormとするnormed linear spaceになる。

定理１　L_ρ が $(\hat{5})$ をみたし，purely infinite part をもたないとき，性質（L）をもつならば

$$\mathbb{V}_\rho \cong \mathbb{B}(X, L_\rho)$$

証明　$T \in \mathbb{B}(X, L_\rho)$ とする。$x^*(\cdot)$ をつぎのように定義する。

$$x^*(E)x = \int_E (Tx)(\omega)\,d\mu(\omega) \qquad E \in \Sigma_0'$$

このとき，$x^*(\cdot) \in \mathbb{V}_\rho$ である。まず $x^*(\cdot)$ が定義できることは $|x^*(E)x| = |\int_E (Tx(\omega))\,d\mu(\omega)| \leqq \rho(Tx)\rho'(\chi_E) < \infty$ $(E \in \Sigma_0')$ から分る。更に $\|x^*(E)\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leqq 1} |x^*(E)x|$ $\leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \rho(Tx)\rho'(\chi_E) = \|T\| \cdot \rho'(\chi_E) < \infty$ から $x^*(E) \in X^*$.

$x^*(\cdot)x$ は countably additive で μ-continuous である。$\mathfrak{E}$ を分割としたとき，$\rho''((Tx)_{\mathfrak{E}}) = \rho''(\sum_{\mathfrak{E}} [x^*(E_i)x/\mu(E_i)]\chi_{E_i})$ $\leqq \rho''(Tx)$．故に

$$\mathbb{V}_\rho(x^*(\cdot)) = \sup_{\|x\| \leqq 1} \sup_{\mathfrak{E}} \rho(\sum_{\mathfrak{E}} [x^*(E_i)x/\mu(E_i)]\chi_{E_i}) \leqq \sup_{\|x\| \leqq 1} \rho(Tx)$$
$$= \|T\|.$$

つぎに逆を証明する。$x^*(\cdot) \in \mathbb{V}_\rho$ として Radon-Nykodym を使って $x^*(E)x = \int_E f\,d\mu$ (for all $E \in \Sigma_0'$) で表わす。この f を $dx^*(\cdot)x/d\mu$ で表わす。そこで

$$Tx = dx^*(\cdot)x/d\mu$$

とおくと $T \in \mathbb{B}(X, L_\rho)$ がつぎのようにして云える。T が linear であることは容易に分る。

$$\int_E Tx\,d\mu = \int_E (dx^*(\cdot)x/d\mu)\,d\mu = x^*(E)x \quad (E \in \Sigma_0')$$

故に $(Tx)\cdot\chi_E \in L_1$ (for all $E\in\Sigma_0'$) であって，$\|Tx\cdot\chi_E\| = |x^*(E)x|$.

g が simple function すなわち $g=\sum\alpha_i\chi_{E_i}$，$E_i\in\Sigma_0'$ のときは

$Tx\cdot g\in L_1$ で

$$\|Tx\cdot g\|_1 \leqq \int\sum_i|\alpha_i|\left(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)\right)\chi_{E_i}\,d\mu$$
$$\leqq \rho'(g)\,\rho\Big(\sum_i (x^*(E_i)x/\mu(E_i))\chi_{E_i}\Big) \leqq \rho'(g)\,V_\rho(x^*(\cdot))\|x\|$$

したがって　$M_{\rho'}' = \{f\in L_{\rho'}\mid f \text{ simple function}\}^- \ni g \Rightarrow Tx\cdot g\in L_1$

M_ρ' の性質から $Tx\cdot g\in L_1$ (for all $g\in L_\rho'$) が分り，$Tx\in L_\rho$.

つぎに T が bounded operator を見よう。

$$\int|g|\,|Tx|\,d\mu = \int|g|\lim_{\varepsilon}\sum_{\varepsilon}\left(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)\right)\chi_{E_i}\,d\mu$$

とくに $g\in L_{\rho'}$ が simple function のときは

$$=\lim_{\varepsilon}\int|g||(Tx)_\varepsilon|\,d\mu.$$

$$\rho(Tx)=\rho''(Tx)=\rho''(\lim_\varepsilon (Tx)_\varepsilon) = \sup_{\rho'(g)\leqq1,\ g\ \text{simple}}\int\lim_\varepsilon|g|\cdot|(Tx)_\varepsilon|\,d\mu$$
$$=\sup_{\rho'(g)\leqq1}\lim_\varepsilon\int|g|\sum_\varepsilon\left(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)\right)\chi_{E_i}\,d\mu$$

を用いて，

$$\rho''(Tx)\leqq\sup_\varepsilon\rho''\Big(\sum_\varepsilon\left(|x^*(E_i)x|/\mu(E_i)\right)\chi_{E_i}\Big)$$

したがって，$\|T\| = \sup_{\|x\|\leqq1}\rho(Tx)\leqq V_\rho(x^*(\cdot))$　　以上

§3　$\mathbb{B}(L_\rho, X)$ の表現

一般の L_ρ についてはよく分らない。$M_\rho=\{f\in L_\rho\mid f\ \text{simple}\}^-$ は L_ρ の closed linear subspace である。$L_\rho = M_\rho$ の場合を考える。X-valued set function $x(\cdot)$ に対して ρ'-variation をつぎのように定義する。

$$W_{p'}(x(\cdot)) = \sup_{\|x^*\|\leq 1} \sup_{\mathcal{E}} \rho'\Big(\sum_{\mathcal{E}} [x^*x(E)/\mu(E_i)]\chi_{E_i}\Big)$$

を norm として，つぎの normed linear space を考える。

$$\overline{W}_{p'} = \{ x(\cdot) \mid x(\cdot) : \Sigma_0 \to X,\ x(\cdot) \text{ finitely additive},\ \mu(E)=0 \Rightarrow x(E)=0,\ \overline{W}_{p'}(x(\cdot)) < \infty \}$$

$x(\cdot)$ に関する積分を定義しよう。

f を simple function すなわち $f = \sum_i \alpha_i \chi_{E_i}$ $(E_i \in \Sigma_0)$ のとき，$\int_E f\,dx = \int_E (\sum_i \alpha_i \chi_{E_i})\,dx = \sum_i \alpha_i x(E_i \cap E)$ と定める。

f を measurable function とし，つぎの性質をもつ simple function の列 f_n がみつかるとき f を $x(\cdot)$ integrable という。

(1) $f_n \to f$ in $x(\cdot)$ measure

(2) $\lambda_n(E) = \int_E f_n\,dx$ のとき，$\lambda_n(E)$ は uniformly absolutely continuous ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\|x\|(E) < \delta \Rightarrow \|\lambda_n(E)\| < \varepsilon$ $(n=1,2,\cdots)$)

(3) $\lambda_n(E)$ は equi-continuous ($\forall \varepsilon > 0$ $\exists E_\varepsilon \in \Sigma$, $\forall G \subset \Omega - E_\varepsilon$, $G \in \Sigma$, $\|\lambda_n(G)\| < \varepsilon$ $(n=1,2,\cdots)$)

ただし，variation はつぎの形で入れる。

$$\|x\|(E) = \sup_{\mathcal{E}} \{ \|\sum_{\mathcal{E}} \alpha_i x(E_i)\| \mid |\alpha_i| \leq 1,\ E \supset E_i \text{ disjoint} \}$$

このとき，$\lambda_n(E) \to \lambda(E)$ (X の norm 位相で) がいえるので $\lambda(E) = \int_E f\,dx$ と表わし，f の $x(\cdot)$ による積分という。

定理2　$f \in M_p$，$x(\cdot) \in \overline{W}_{p'}$ のとき，f は $x(\cdot)$ integrable.

証明　g が simple function のとき，つぎの不等式が成立する。

(A)　$\| \int_E g \, dx \| \leq \rho(g \chi_E) W_{\rho'}(x(\cdot))$

(B)　$\| \int_E g \, dx \| \leq \|x\|(E) \cdot \|g\|_\infty$

(C)　$\|x\|(E) \leq W_{\rho'}(x(\cdot)) \rho(\chi_E)$

$0 \leqq f \in M_\rho$ のとき　$^\exists f_n$ simple function　$0 \leqq f_n \uparrow f$, $\rho(f-f_n) \to 0$.

$T_n^\alpha = \{ w \mid f(w) - f_n(w) \geqq \alpha \}$　$(\alpha > 0)$　とおくと，

$\|x\|(T_n^\alpha) \downarrow$ であり，不等式(C)より

$\|x\|(T_n^\alpha) \leqq W_{\rho'}(x(\cdot)) \rho(\chi_{T_n^\alpha}) \leqq W_{\rho'}(x(\cdot)) \rho(\chi_{T_n^\alpha}) < +\infty$

から $\|x\|(T_n^\alpha)$ は有限値に収束する。これが0に収束すれば

$f_n \to f$ in $x(\cdot)$ measure である。$\lim_{n\to\infty} \|x\|(T_n^\alpha) = S_\alpha > 0$ と

仮定すると，$\rho''(f_n - f) = \sup \{ \int |h| |f - f_n| d\mu \mid \rho'(h) \leqq 1 \}$

$\geqq \int |f_n - f| \cdot | \sum [\alpha_i x^* x(E_i)/\mu(E_i)] \chi_{E_i} / W_{\rho'}(x(\cdot)) | d\mu$

ここに $|\alpha_i| \leqq 1$，E_i は T_n^α の partition で $S_\alpha + \varepsilon \geqslant \| \sum \alpha_i x(E_i) \| \geqslant S_\alpha$

$\geqq (\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))) \int | \sum (\alpha_i x^* x(E_i))/\mu(E_i) \cdot \chi_{E_i} | d\mu$　　$\|x^*\| \leqq 1$

$= (\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))) \sum | \alpha_i x^* x(E_i) | \geqq (\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))) | x^*(\sum \alpha_i x(E_i)) |$

$\exists x^*$，$\|x^*\| = 1$　$| x^*(\sum_i \alpha_i x(E_i)) | = \| \sum_i \alpha_i x(E_i) \|_X$ (Hahn-Banach)

故に n を十分大とすると上の不等式から

$$\rho''(f - f_n) \geqq \alpha S_\alpha / W_{\rho'}(x(\cdot))$$

一方　$\rho(f - f_n) = \rho''(f - f_n) \to 0$ から矛盾し，$S_\alpha = 0$ すなわち

$f_n \to f$ in $x(\cdot)$ measure が云える。

f_n に関する $\lambda_n(E)$ が uniformly absolutely continuous になる

ことは，前に述べた不等式 (A), (B) から見易い。

つぎに $\lambda_n(E)$ が equi-continuous になることを見るには

$n \geqq N$ のとき $\rho(f-f_n) < \varepsilon / W_{\rho'}(x(\cdot))$ が成立する N について $f_1, f_2, \cdots, f_N$ の support の各々の union を E_ε とおくと，

不等式 (A)をもちいて

$$\|\lambda_n(E_\varepsilon)\| \leqq \rho(f_n \chi_{E_\varepsilon}) W_{\rho'}(x(\cdot)) < +\infty$$

であり，$G \in \Sigma_0$, $G \subseteq \Omega - E_\varepsilon$ ならば

$$\|\lambda_n(G)\| \leqq \rho(f_n \chi_G) \cdot W_{\rho'}(x(\cdot))$$

より，

$$\|\lambda_n(G)\| \leqq \rho((f-f_N)\chi_G) W_{\rho'}(x(\cdot)) < \varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots)$$

を得る。したがつてこのとき，任意の M_ρ の要素 f は $x(\cdot)$ に関する積分が定義できる。

定理3　ρ が (L) をもてば $\mathbb{B}(M_\rho, X)$ と $\overline{W}_{\rho'}$ とは対応

$$Tf = \int f\, dx$$

で isomorph になる。また $\|T\| = W_{\rho'}(x(\cdot))$

証明　$x(\cdot) \in \overline{W}_{\rho'}$ のとき，$Tf = \int f\, dx$ とおけば T は linear operator になることは明白である。h が simple function のとき，

$$\left\|\int h\, dx\right\| \leqq \rho(h)\, W_{\rho'}(x(\cdot)).$$

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| \mid \rho(h) \leqq 1,\ h \text{ simple function}\}$$

$$= \sup\left\{\left\|\int h\, dx\right\| \mid \rho(h) \leqq 1,\ h \text{ simple function}\right\} \leqq W_{\rho'}(x(\cdot))$$

逆に $T \in \mathbb{B}(M_\rho, X)$ のとき $x(\cdot) : \Sigma_0 \to X$ をつぎのように定める。 $x(E) = T(\chi_E)$

$\mathcal{E}$ を分割とし，$x^* \in X^*$，$\|x^*\| \leq 1$ のとき，$h = \sum_j \beta_j \chi_{F_j}$ (simple) としたとき，

$$\int |h| \sum_{\mathcal{E}} (|x^* x(E_i)| / \mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu = \sum_i \alpha_i \Big[\sum_j (|\beta_j| \mu(E_i \cap F_j) / \mu(E_i)) x^* x(E_i)\Big]$$
$$= x^*\Big(\sum_i \alpha_i \Big[\sum_j |\beta_j| \mu(E_i \cap F_j) / \mu(E_i) x(E_i)\Big]\Big) \leq \Big\| \int g\, dx \Big\|_X$$

ただし，$g = \sum_i \alpha_i (\int_{E_i} |h| d\mu / \mu(E_i)) \chi_{E_i}$，$\alpha_i$ は $|\alpha_i| = 1$，$\alpha_i x^* x(E_i) = |x^* x(E_i)|$ とする。 また $\rho(g) \leq \rho(h)$ である。

$$\rho'\Big(\sum_{\mathcal{E}} (|x^* x(E_i)| / \mu(E_i)) \chi_{E_i}\Big) = \sup\Big\{ \int |h| \sum_{\mathcal{E}} (|x^* x(E_i)| / \mu(E_i)) \chi_{E_i} d\mu$$
$$\Big|\ \rho(h) \leq 1,\ h \text{ simple function}\Big\} \leq \sup\Big\{ \Big\| \int g\, dx \Big\|_X \ \Big|\ \rho(g) \leq 1,\ g \text{ simple}\Big\}$$
$$= \|T\|$$

故に，$W_{\rho'}(x(\cdot)) \leq \|T\|$

§4 L_ρ^* の表現

$$\widetilde{L}_\rho = \{ f \mid f = \bigcup_{i=1}^n f_i,\ f_i \geq 0,\ \rho(f_i) \leq 1 \text{ for some } n \}$$

とおき，$N_\rho = L_\rho / M_\rho$ とおき，canonical map を $\lambda : L_\rho \to N_\rho$ として，つぎの条件を考えよう。

(I) $\lambda(\widetilde{L}_\rho)$ は N_ρ の closed unit ball に入る。

ρ が条件(I)をみたしているとき，N_ρ^* は abstract L-space になり，このとき $Z^* \in N_\rho^*$，$Z^* \geq 0$ に対する norm は

$$\|Z^*\| = \sup\{ |Z^*(\lambda(f))| \mid f \in \widetilde{L}_\rho \}$$

で与えられる。

N_p^*の表現を考える。$B(\Omega, \Sigma, \mu)$ を bounded additive set function on Σ (μ-null set で0になる) の全体を表わす。$\nu \in B(\Omega, \Sigma, \mu)$に対して $\|\nu\| = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| \mid \{E_i\} \subset \Sigma$, 互にdisjoint$\}$ で normを定義する。また $0 \leqq \psi \leqq |\nu|$で ψ が countably additive なら $\psi = 0$ となるνの全体を$PB(\Omega, \Sigma, \mu)$で表わす。実は N_p^* が$PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ の closed linear subspaceになる。$Z^* \in N_p^*$とし

$Z^* \geqq 0$ のとき $\nu(E) = \|Z_E^*\|$, $Z_E^*(\lambda(f)) = Z^*(\lambda(f \cdot \chi_E))$

とすると $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$が分る。$0 \leqq \nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ と $0 \leqq f \in L_p$ に対して

$$I_\nu(f) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} \|\lambda(f\chi_{E_i})\| \nu(E_i) \mid \{E_i\} \text{は} \Omega \text{の partition}\}$$

と定義すると

$$I_\nu(\alpha f) = \alpha I_\nu(f)$$

$$0 \leqq f \leqq g \Rightarrow I_\nu(f) \leqq I_\nu(g)$$

$$0 \leqq I_\nu(f) \leqq \|\lambda(f)\| \nu(\Omega)$$

$$I_\nu(f+g) = I_\nu(f) + I_\nu(g)$$

$$I_{a\nu+b\varphi}(f) = a I_\nu(f) + b I_\varphi(f)$$

が成立する。このとき$\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$ に対して $Z^*(\lambda(f)) = I_\nu(f)$ とすれば $Z^* \in N_p^*$ となる。positiveでない $Z^* \in N_p^*$のとき,

$$\nu(E) = \|(Z_E^*)^+\| - \|(Z_E^*)^-\|$$

とおけば $\nu \in PB(\Omega, \Sigma, \mu)$であって, このような$\nu$の全体を $P_{p'}$ で表わすと, 今のべた議論から N_p^* と $P_{p'}$ とは isomorphic

になる。

定理4　ρが (L)と(I) とをみたすとき

$$L_\rho^* \cong \mathbb{W}_{\rho'} \times P_{\rho'}$$　（$\mathbb{W}_{\rho'}$ を定義する X を scalar とする。）

ここで norm は $\|(G, \nu)\| = W_{\rho'}(G) + |\nu|(\Omega)$ で定義する。

つぎに M_ρ^* について考えよう。

ν を set function として

$$\|\nu\| = \sup\{\, |\textstyle\int f\, d\nu| / \rho(f) \mid f \text{ simple} \in M_\rho \,\}$$

としたとき，

$$\mathbb{V} = \{\, \nu \mid \nu \text{ additive set function on } \Sigma_0,\ \mu\text{-null set で } 0,\ \|\nu\| < +\infty \,\}$$

とおく。$x^* \in M_\rho^*$ のとき Σ_0 上の additive set function が存在して $x^* f = \int_\Omega f\, d\nu$ (Dunford-Schwarz の積分) が定義できる。そして $\mathbb{V} \cong M_\rho^*$ となる。

$\mathbb{V} \times P_{\rho'}$ 上の norm を

$$\|(\nu, \varphi)\| = \|\nu\| + |\varphi|(\Omega)$$

とおけば

定理5　ρが条件(I)をみたすとき $L_\rho^* \cong \mathbb{V} \times P_{\rho'}$

ここで $x^* \in L_\rho^*$ ならば

$$x^* f = \int f\, d\nu + I_\varphi(f)$$

と書くことができる。

一般的に云えば $L_p^* \cong M_p^\perp \oplus M_p^\perp$ の orthogonal complement で $M_p^\perp$ の orthogonal complement $\cong M_p^*$ である。

また countably additive set function の全体を C とすれば $C \cong L_{p'}$ であるが、C と $\mathbb{V}$ とは一般には異なる。

§5 Szegő の定理

ここで Ω は compact Hausdorff space とし、L_p が Orlicz 空間である場合を考える。Φ, Ψ を complementary Young 関数として、μ は regular Borel measure で $\mu(X)=1$ とする。

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(|f|)\,d\mu$$

とし、$\|f\|_p = \inf_{c>0} \dfrac{1+M_\Phi(cf)}{c}$, $\|f\|_{(p)} = \inf_{c>0,\ M_\Phi(cf)\leqq 1} \dfrac{1}{c}$

と function norm ($\|\cdot\|_p$ と $\|\cdot\|_{(p)}$ とは equivalent) を定める。

Ω 上の有界 Borel function の集まり B が log-set とは

(1) $cf \in B$ for $c \geqq 0$, $f \in B$

(2) uniform closure $\{\log|f| \mid f \in B\}$ は real-valued continuous function on Ω を含む。

今 Φ の derivative φ が連続であると仮定する。$u\varphi(u)$ $(u \geqq 0)$ の逆関数を M で表わすと

$$u\varphi(u) = \Phi(u) + \Psi(\varphi(u))$$

から μ-integrable $h \geqq 0$ に対して

$$(*) \quad \int_\Omega h\,d\mu = M_\Phi(M(h)) + M_\Psi(\varphi(M(h)))$$

が成立する。このとき $M(h) \in L_p$ であり $\varphi(M(h)) \in L_{p'}$ である。

さて測度 m が μ に関して absolutely continuous のとき，

$$M_{\Psi}(\varphi(M(\alpha_m \frac{dm}{d\mu}))) = 1$$

$$M_{\Psi}(M(\beta_m \frac{dm}{d\mu})) = 1$$

となる positive numbers α_m, β_m が (*) から存在する。

任意の log-set B に対してつぎの定理が成立する。

定理 6　m が μ に関して absolutely continuous のとき

$$\inf\{\|f\|_p \mid f \in B \cap D_m^+\} = \alpha_m \exp\left(-\int_\Omega \log M(\alpha_m \frac{dm}{d\mu})\,dm\right)$$

$$\inf\{\|f\|_{(p)} \mid f \in B \cap D_m^+\} = \exp\left(-\int_\Omega \log M(\beta_m \frac{dm}{d\mu})\,dm\right)$$

となり，m が μ に関して singular のときはそれぞれ 0 となる。

ここで $D_m^+ = \{f \mid$ bounded Borel function, $\int_\Omega \log|f|\,dm \geq 0\}$ である。

定理が成立する理由の一つは m が μ に関して absolutely continuous のとき，すべての $c \geq 0$ に対して $\int_\Omega \log M(c \frac{dm}{d\mu})\,dm > -\infty$ が示されるからである。

A を uniformly closed subalgebra of $C(\Omega)$ とする。$A \ni 1$ と $\{\log|f|,\ f$ invertible in $A\}$ が real-valued continuous function の集合の中で dense とする。(uniform converge の位相で) m を regular Borel measure on Ω で multiplicative とする。すなわち $\int_\Omega fg\,dm = \int_\Omega f\,dm \cdot \int_\Omega g\,dm$ for $f, g \in A$.

このような A を logmodular algebra というが，logmodular algebra は log-set である。 $A_0=\{f \mid f\in A, \int_\Omega f\,dm=0\}$ とおく。

定理7 A を log-modular algebra で m を multiplicative measure on A とする。m が μ に関して absolutely continuous ならば

$$\inf\{\|1-f\|_p \mid f\in A_0\} = a_m \exp\left(-\int_\Omega \log M\left(a_m \frac{dm}{d\mu}\right) dm\right)$$

$$\inf\{\|1-f\|_{(p)} \mid f\in A_0\} = \exp\left(-\int_\Omega \log M\left(\beta_m \frac{dm}{d\mu}\right) dm\right)$$

m が μ に関して singular ならば、それぞれともに 0 になる。

以上は Szegö の定理を L_p (Orlicz ではあるが) で考えたものである。

references

1 T. Ando Linear functionals on Orlicz spaces Nieuw. Arch. Wisk 1–16 8 (1960)

2 R.G. Bartle A general bilinear vector integral Studia Math. 15 (1956)

3 N. Dunford - J.T. Schwartz Linear operators I

4 H.W. Ellis - I. Halperin Function spaces determined by a levelling length function. Can. J. Math 5 (1953)

5 N.E. Gretsky Representation theorems on Banach function spaces. Mem. Amer. Math. Soc. 84

6 K. Hoffman Banach spaces of analytic functions 1962.

7 S. Koshi On semi-continuity of functionals I
Proc. Japan Acad. 34 (1958)

8 G.G. Lorenz - D.G. Wertheim Representation of linear functionals on Köthe spaces
Can. J. Math. 5 (1953)

9 W.A.J. Luxemburg Banach function spaces Deft. 1955

10 K. Urbanik Szegő's theorem for Orlicz spaces
Bull. Acad. Pol. Sci 14 (1966)